Chapitre 7
Arbres binaires de recherche

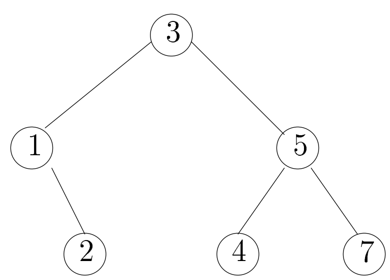
Une référence sur le sujet est le livre de Mahmoud [7]

1 Définitions

Un **arbre binaire de recherche** est un arbre binaire dont chaque nœud interne est muni d'une "clé" (d'une étiquette, d'une marque, qui est dans un premier temps un entier) de telle sorte qu'à chaque nœud de l'arbre, toutes les clés du sous-arbre droit sont plus grandes que toutes les clés du sous-arbre gauche.

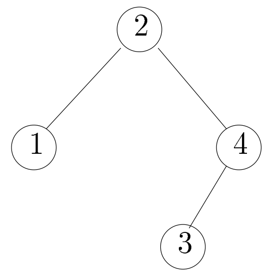
La définition (récursive) d'un **arbre binaire de recherche** est aussi la suivante : donnons-nous $x_1, x_2, \dots x_n$ réels distincts. L'arbre binaire de recherche (abrégé abr) est l'arbre binaire dans lequel
- x_1 est à la racine
- le sous-arbre gauche est l'abr associé à $\{x_2, \dots x_n\} \cap]-\infty, x_1[$
- le sous-arbre droit est l'abr associé à $\{x_2, \dots x_n\} \cap]x_1, +\infty[$

<u>Exemple</u> : trier 3, 1, 5, 4, 7, 2



<u>Remarque</u> : la lecture de l'arbre en ordre symétrique donne la liste triée. <u>Attention</u> : différentes permutations peuvent donner le même arbre. Par exemple, 2 1 4 3 et 2 4 1 3 donnent l'arbre

<u>Insertion</u> : si l'on veut insérer une (n+1)ème donnée x_{n+1}, on la compare à la racine, puis à la clé racine du sous-arbre gauche (ou droit), etc... on ne la



compare pas à toutes les clés mais seulement le long d'une branche, jusqu'à l'insérer sur un noeud externe. Appelons D_{n+1} (qui est plus ou moins un coût) le niveau d'insertion de la (n+1)ème donnée. Cet entier est toujours inférieur ou égal à $1 + h_n$, où h_n est la hauteur de l'arbre T_n :

$$h_n := \max_{u \in T_n} \mid u \mid .$$

Ces deux variables aléatoires sont intéressantes à étudier. On a toujours, en considérant les deux cas extrêmes

$$\lfloor log_2 n \rfloor \leq h_n \leq n - 1$$

et on verra plus loin que l'ordre de grandeur de la hauteur est heureusement en $\log n$.

Modèle probabiliste : à tout ensemble de n données distinctes $x_1, x_2, \ldots x_n$, on associe un arbre binaire de recherche T_n, à n noeuds internes et n+1 noeuds externes. Le modèle que nous étudions dans la suite, c'est-à-dire la loi de probabilité sur les arbres est l'image (par cette association) de la **loi uniforme sur les permutations** de n objets. Dans ce modèle, les arbres (T_n) ont même loi que ceux construits en choisissant $x_1, x_2, \ldots x_n$ selon une densité uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Voyons, grâce au lemme suivant que dans ce modèle, l'insertion de la (n+1)ème donnée se fait uniformément sur les n+1 noeuds externes. Le lemme montre même que c'est le cas pour $x_1, \ldots, x_N$ i.i.d., de fonction de répartition $F(x)$.

Lemme 1 *Appelons U_k le rang de la donnée x_k parmi $x_1, \ldots, x_k$. Alors*

$$\mathbb{P}(U_k = j) = \frac{1}{k}$$

c'est-à-dire que U_k est de loi uniforme sur $\{1, \ldots, k\}$, quelle que soit la loi des données.

Démonstration Comme il s'agit d'une loi continue, la probabilité que x_k soit égale à l'une des données précédentes est nulle. De plus, dire que la k-ième donnée est à la place j, revient à dire que $j-1$ données sont plus petites et que $(k-1)-(j-1)$ données sont plus grandes, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_k = j) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(U_k = j / x_k = x) \; dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{k-1}{j-1} \big(F(x)\big)^{j-1} \big(1 - F(x)\big)^{k-j} dF(x) \\
&= \int_0^1 \binom{k-1}{j-1} t^{j-1} (1-t)^{k-j} \; dt \\
&= \binom{k-1}{j-1} \beta(j, k-j+1) \\
&= \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

□

Supposons construit un arbre à $n-1$ nœuds (internes) correspondants aux données $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Numérotons les n nœuds externes disponibles de 1 à n de gauche à droite. Par lecture en ordre symétrique, on se rend compte que l'événement "$U_n = j$" est aussi l'événement "x_n est insérée sur le nœud externe numéro j". Une conséquence intéressante du lemme précédent est ainsi : après construction d'un arbre à $n-1$ noeuds, l'insertion d'une n-ième clé a la même probabilité d'être effectuée à chacun des n nœuds externes.

Attention : dans ce modèle probabiliste, appelé "modèle des permutations uniformes" (random permutation model), la loi uniforme est sur $\mathcal{S}_n$, le groupe des permutations ; ce qui signifie que les abr ne sont pas équiprobables, à l'inverse des arbres de Catalan.

2 Hauteur d'un abr ; connection abr-marche aléatoire de branchement

Les résultats sur la hauteur sont essentiellement dus à Devroye [3] et ils peuvent pour certains être compris, retrouvés ou améliorés à partir des résultats de Biggins [1] sur les marches aléatoires avec branchement.

Rappelons que T_n est l'abr de taille n, associé à $x_1, x_2, \dots x_n$. Pour tout nœud u de T_n, appelons $V_u =\mid T_u \mid$ la taille (c'est-à-dire le nombre de nœuds) du sous-arbre issu de u. Pour la racine (notée $\emptyset$), $V_\emptyset = n$ et si $V_1 =\mid T_1 \mid$, alors $V_2 =\mid T_2 \mid= n-1-V_1$. On sait que V_1 est uniforme sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Maintenant attachons à tous les nœuds u des variables aléatoires indépendantes U_u, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors un calcul immédiat conduit au

Lemme 2 *: V_1 a même loi que $\lfloor nU \rfloor$; en corollaire, $n-1-V_1 = V_2$ a même loi que $\lfloor n(1-U) \rfloor$.*

De la même façon, on obtient que pour n'importe quel nœud u de l'arbre, de taille $V_u =\mid T_u \mid$, le sous-arbre gauche est de taille V_{u1} qui a même loi que $\lfloor V_u U_u \rfloor$ et le sous-arbre droit est de taille V_{u2} qui a même loi que $\lfloor V_u(1-U_u) \rfloor$. Finalement, pour un nœud à distance k de la racine, c'est-à-dire à profondeur k, V_u a même loi qu'un produit du type $\lfloor \dots \lfloor \lfloor n\tilde{U} \rfloor \tilde{U}_2 \rfloor \dots \tilde{U}_k \rfloor$ (où l'on écrit $\tilde{U}_i$ au lieu de U_i pour un i-ème ancêtre qui est une branche gauche et $1-U_i$ pour un i-ème ancêtre qui est une branche droite). Or, la loi de V_u est intéressante car la loi de la hauteur h_n de l'arbre est reliée aux V_u par la dualité suivante, qui est la base de la connection recherchée :

Proposition 1

$$\{h_n \geq k\} \;=\; \{\max_{u,|u|=k} \; V_u \geq 1\}.$$

Attention : le calcul de la loi de h_n ne sera pas simple, car les V_u sont très dépendants les uns des autres.

Reprenons le raisonnement précédent en termes de proportions, c'est-à-dire en considérant les $\frac{V_u}{n}$, qui représentent la proportion de nœuds dans le sous-arbre issu de u. Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient (démonstration rigoureuse à faire) que la proportion de nœuds dans le sous-arbre issu de u est

$$\prod_{v<u} \tilde{U}_v \;,$$

où l'inégalité $v < u$ s'entend sur l'arbre, elle signifie "v ancêtre de u".

Considérons par ailleurs une marche aléatoire de branchement de processus ponctuel Z donné par

$$Z = \delta_{-\log U} + \delta_{-\log(1-U)}$$

($\delta_{\{k\}}$ désigne la mesure de Dirac au point k) où U suit une loi uniforme sur $[0,1]$. Dans ce modèle, la "position" de u dans l'arbre de branchement est donnée par

$$X_u = -\log(\prod_{v<u} \tilde{U}_v)$$

(avec la même convention : $\tilde{U}_v$ peut être U_v ou $1-U_v$), soit encore

$$e^{-X_u} = \prod_{v<u} \tilde{U}_v \ .$$

Ces égalités sont à comprendre en loi, car au pied de la lettre, on doit trouver dans le produit ci-dessus des variables U_v et $1-U_v$, suivant si on a affaire à une branche à gauche ou à droite. Comme U_v et U_w sont indépendantes pour v différent de w et comme U_v et $1-U_v$ sont chacune de loi uniforme sur $[0,1]$, cela n'induit pas de complication ici.

On voit ainsi que les deux modèles coïncident, du moins pour n assez grand. En guise d'application de cette connection entre les deux modèles, la proposition 1 induit

$$\{h_n \geq k\} \ = \ \{\max_{u,|u|=k} (\prod_{v<u} \tilde{U}_v) \geq \frac{1}{n}\}$$

$$\{h_n \geq k\} \ = \ \{\max_{u \in z_k} \ e^{-X_u} \geq \frac{1}{n}\}$$

ce qui signifie que le comportement asymptotique de la hauteur est donné par le comportement asymptotique de la position de la particule la plus à gauche dans la marche aléatoire de branchement. Or ce problème a été résolu dans ce dernier cadre et l'on obtient ainsi le

Théorème 1 *(Devroye, 1986)*

$$\frac{h_n}{\log n} \longrightarrow \textit{Constante}, \quad \textit{presque sûrement quand } n \to +\infty$$

De façon duale, introduisons h'_n le premier niveau d'apparition d'un noeud externe (c'est aussi le coût minimal d'une recherche vaine) ; h'_n s'appelle niveau de saturation de l'abr. Alors

Théorème 2

$$\frac{h_n}{\log n} \longrightarrow c \quad p.s. \qquad \frac{h'_n}{\log n} \longrightarrow c' \quad p.s$$

où c et c' sont solutions de l'équation

$$x \log \frac{2e}{x} = 1.$$

La conjecture dite de Robson disant que **la variance de la hauteur d'un arbre binaire de recherche est d'ordre de grandeur 1**, a longtemps tenu mais est maintenant résolue, et par plusieurs méthodes (Devroye, Reed [4], Drmota [5]). Des conjectures sont encore non résolues, sur la concentration de la hauteur autour de sa moyenne ou de sa médiane.

3 Répartition des nœuds externes, largeur d'un abr.

3.1 Notations

Outre la hauteur et le niveau de saturation, si l'on veut connaître plus finement la répartition des noeuds par niveau dans l'arbre binaire de recherche, on introduit naturellement

$$U_k(n) := \text{le nombre de noeuds externes au niveau } k \text{ dans l'arbre } T_n.$$

On pourrait travailler de façon analogue avec les noeuds internes et introduire

$$V_k(n) := \text{le nombre de noeuds internes au niveau } k \text{ dans l'arbre } T_n.$$

ainsi que

$$\begin{aligned} Z_k(n) &:= \text{le nombre total de noeuds au niveau } k \text{ dans l'arbre } T_n \\ Z_k(n) &= U_k(n) + V_k(n). \end{aligned}$$

Comme il y a $n+1$ noeuds externes dans l'arbre T_n de taille n, la mesure empirique de répartition des noeuds externes est

$$\nu_n := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{U_k(n)}{n+1}\ \delta_{\{k\}}.$$

Comme la $(n+1)$-ième insertion se fait uniformément sur les $n+1$ noeuds externes de l'arbre T_n, la loi du niveau d'insertion, ou profondeur D_n est donnée par

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = k \mid T_n) = \frac{U_k(n)}{n+1} = \nu_n(k), \tag{1}$$

et en prenant l'espérance

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = k) = \mathbb{E}(\frac{U_k(n)}{n+1}) = \mathbb{E}(\nu_n(k))$$

autrement dit la loi de D_{n+1} est ce qu'on appelle la mesure d'intensité (déterministe) du processus ponctuel ν_n, par conséquent **les résultats en moyenne sur la mesure ν_n donneront des résultats en loi sur D_n.**

3.2 Résultats en moyenne sur les nœuds externes

Théorème 3 *(Lynch, 1965)*

$$\mathbb{E}U_k(n) = \frac{2^k}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

où $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ sont les nombres de Stirling de première espèce, c'est-à-dire que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le coefficient de x^k dans le développement de $x(x+1)\dots(x+n-1)$. Ces nombres vérifient la relation de récurrence

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} .$$

Corollaire 1 *La loi de D_n est donnée par*

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = k) = \frac{2^k}{(n+1)!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Preuve du théorème 3

On utilise fortement une sorte de propriété de branchement, ici le conditionnement par la taille du sous-arbre gauche T_1. Posant

$$a_{n,k} := \mathbb{E}U_k(n)\ \frac{n!}{2^k},$$

un petit calcul permet de voir que les $a_{n,k}$ satisfont la relation de récurrence des nombres de Stirling et ont les mêmes valeurs initiales. □

3.3 Résultats p.s. sur les nœuds externes

On voit facilement que pour tout niveau k de l'arbre T_n ,

$$Z_{k+1}(n) = 2V_k(n)$$

et donc

$$Z_{k+1}(n) - Z_k(n) = V_k(n) - U_k(n)$$

Comme au plus bas niveau de l'arbre, il n'y a que des nœuds externes

$$U_{1+h_n}(n) = Z_{1+h_n}(n) \text{ et } V_{1+h_n}(n) = 0$$

et par une récurrence descendante sur k :

$$Z_k(n) = \sum_{j=k}^{1+h_n} \frac{U_j(n)}{2^{j-k}}$$

qui est une quantité du type "polynôme de niveau".

Définition 1 *On appelle* **polynôme de niveau** *d'un arbre binaire de recherche T_n, le polynôme défini pour tout paramètre $z \in \mathbb{C}$ par*

$$W_n(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(n)\ z^k$$

Il s'agit bien d'un polynôme, car pour $k > 1 + h_n, U_k(n) = 0$. Bien entendu, c'est une variable aléatoire, puisque les $U_k(n)$ sont aléatoires.

3.4 Résultats en moyenne sur le polynôme de niveau

On obtient très facilement la moyenne du polynôme de niveau, car

$$\mathbb{E}W_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}U_k(n)\ z^k$$

et d'après le théorème 3,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W_n(z) &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k z^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{n!} 2z(2z+1)\dots(2z+n-1) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{j+2z}{j+1}\ . \end{aligned}$$

La loi de la profondeur est alors immédiate, car si $D_n(z)$ est sa série génératrice

$$D_n(z) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(D_n = k) z^k = \mathbb{E}(z^{D_n}) \ ,$$

comme $\mathbb{P}(D_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\mathbb{E}U_k(n)$ (cf. equation (1)), on obtient

$$D_{n+1}(z) = \frac{1}{n+1}\mathbb{E}W_n(z) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n-1}(j+2z)$$

qui est une expression assez explicite de la série génératrice de la profondeur d'insertion.

Exercice En déduire que

$$\mathbb{E}(D_{n+1}) = 2(H_{n+1} - 1)$$

et calculer $Var(D_{n+1})$.

3.5 Résultats p.s. sur le polynôme de niveau

La relation évidente

$$U_k(n+1) - U_k(n) = -\mathbb{1}_{\{D_{n+1}=k\}} + 2\ \mathbb{1}_{\{D_{n+1}=k-1\}}$$

permet d'avoir une relation de récurrence sur le "polynôme de niveau" :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_{n+1}(z) \mid T_n) &= \sum_{k\geq 0} z^k \Big[U_k(n) + 2\mathbb{P}(D_n = k-1 \mid T_n) - \mathbb{P}(D_n = k \mid T_n)\Big] \\ &= \frac{n+2z}{n+1}\ W_n(z)\ ,\end{aligned}$$

ce qui signifie que le polynôme de niveau convenablement renormalisé est une martingale.

Théorème 4 *pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$,*

$$M_n(z) := \frac{W_n(z)}{\mathbb{E}(W_n(z))} = \frac{W_n(z)}{\prod_{j=0}^{n-1}\frac{j+2z}{j+1}}$$

est une $\mathcal{F}_n$-martingale. Elle converge p.s. pour tout z réel positif. Elle converge dans L^1 sur l'intervalle réel $]c'/2; c/2[$ (les constantes c et c' étant celles du théorème 1). Elle converge dans L^2 sur la boule $B(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ de $\mathbb{C}$.

Idées de démonstration

La propriété de martingale vient du calcul ci-dessus. La convergence presque sûre dans $\mathbb{R}_+$ est celle de toute martingale positive. La convergence dans L^1 est plus difficile à voir. Elle est obtenue en bornant $M_n(z)$ dans L^p pour $p > 1$, de façon assez analogue à la méthode utilisée pour un processus de branchement spatial. Les détails sont dans [6]. La convergence L^2 pour z dans $\mathbb{C}$ s'obtient en calculant la covariance de la martingale et avec un peu d'analyse complexe. La convergence L^1 (et L^p) est un problème ouvert dans $\mathbb{C}$. Les détails se trouvent dans [2]. □

Globalement, cette étude tire parti de l'égalité

$$W_n(z) = \mathbb{E}(W_n(z))M_n(z)$$

qui permet d'étudier le polynôme de niveau en séparant la partie déterministe (son espérance qui est bien connue, cf. section précédente) et la partie aléatoire qui, étant une martingale, possède des propriétés agréables. C'est ainsi que des résultats de type théorème central limite et grandes déviations sur la mesure ν_n peuvent être obtenus, ainsi que l'ordre de grandeur de la largeur d'un arbre binaire de recherche. Appelons en effet $\overline{Z}_n$ la largeur de T_n ; c'est le maximum sur tous les niveaux du nombre de noeuds à chaque niveau :

$$\overline{Z}_n := \max_{k\geq 0} \ Z_k(n)$$

Théorème 5 *(largeur d'un arbre binaire de recherche)*

$$\frac{\overline{Z}_n}{n/\sqrt{\pi \log n}} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right) \quad p.s.$$

lorsque $n \to +\infty$.

4 Coût de construction d'un abr ; coût de recherche ; longueurs de cheminement.

4.1 Coût de construction ; longueur de cheminement interne

Question : combien de clés regarde-t-on avant de placer une nouvelle clé à la bonne place ? Dans un arbre dégénéré (correspondant au cas le pire), on examine $i-1$ clés avant d'insérer la i-ième clé donc on examine $N(N-1)/2$ nœuds pour construire un arbre de N noeuds. Dans le cas le meilleur, le nombre milieu est placé à la racine pour chaque sous-arbre, chaque sous-arbre est de taille $N/2$ et donc le coût de construction de l'arbre vérifie la relation (du type diviser pour régner) $T_N = 2T_{N/2} + N$ ce qui donne $T_N \sim N \log N$ comme nombre d'étapes pour construire l'arbre.

Etant donné un arbre binaire de recherche (construit ou partiellement construit), on aura soit à insérer une nouvelle clé, soit à chercher une clé, d'où un coût de construction et un coût de recherche, mesurés en nombre de comparaisons. Dans les deux cas, cela se fera par un unique chemin dans l'arbre, parcouru par un pointeur partant de la racine et qui chemine en éliminant à chaque comparaison avec une clé racine, le sous-arbre droit ou le sous-arbre gauche. On voit ainsi que le coût de construction d'un abr de taille n, compté en nombre de comparaisons, n'est autre que la longueur de cheminement interne I_n.

$$I_n = \sum_{u \in T_n} \mid u \mid \ .$$

Pour étudier la loi de I_n, on introduit assez naturellement la fonction génératrice bivariée

$$F(x,y) = \sum_{n,k \geq 0} \mathbb{P}(I_n = k) x^n y^k \ .$$

Comme d'habitude, on fait opérer une sorte de propriété de branchement pour obtenir une relation de récurrence sur I_n. En effet, appelons, en omettant l'indice n, T_1 et T_2 les sous-arbres respectivement gauche et droit de T_n. Si T_1 est de taille p, alors T_2 est de taille $n-1-p$, $p = 0, \ldots, (n-1)$, et

$$I_n = I_p(T_1) + I_{n-1-p}(T_2) + (n-1) \tag{2}$$

et donc par l'indépendance conditionnelle des sous-arbres gauche et droit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(I_n = k) &= \sum_{p=0}^{n-1} \mathbb{P}(\mid T_1 \mid = p) \mathbb{P}(I_n = k \ / \mid T_1 \mid = p) \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} \ \mathbb{P}(I_p(T_1) + I_{n-1-p}(T_2) + (n-1) = k \ / \mid T_1 \mid = p) \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{k_1 + k_2 = k-(n-1)} \mathbb{P}(I_p = k_1) \mathbb{P}(I_{n-1-p} = k_2)
\end{aligned}$$

ce qui donne l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F^2(xy,y) \ . \tag{3}$$

Cette équation informe en partie sur la loi de I_n, par exemple, en la reliant aux fonctions génératrices des moments de I_n. Faisons-le pour l'espérance (pour la variance, les calculs sont plus lourds). Appelons B_1 la fonction génératrice de la moyenne de I_n.

$$B_1(x) := \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(I_n)\ x^n$$

Alors

$$B_1(x) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\ |_{y=1}$$

et en dérivant par rapport à x

$$\begin{aligned} B_1'(x) &= \frac{\partial}{\partial y} F^2(xy,y)\ |_{y=1} \\ &= 2xF(x,1)F^2(x,1) + 2F(x,1)B_1(x) \end{aligned}$$

Or,

$$F(x,1) = \sum_{n,k\geq 0} \mathbb{P}(I_n = k)x^n = \frac{1}{1-x}$$

ce qui montre que B_1 est solution de l'équation différentielle

$$B_1'(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{2B_1(x)}{1-x} \tag{4}$$

équation qui se résout sans problème, en rajoutant les conditions initiales $I_0 = 0$ et $I_1 = 0$:

$$B_1(x) = \frac{-2}{(1-x)^2}\Big[x + \log(1-x)\Big] \ .$$

Pour obtenir $\mathbb{E}(I_n)$, il suffit alors d'extraire le coefficient de x^n dans $B_1(x)$. On peut par exemple écrire $B_1(x)$ comme le produit de deux séries

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \frac{2}{(1-x)^2}\Big[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \ldots\Big] \\ &= 2x^2\Big[\sum_{j\geq 0}(j+1)x^j\Big]\Big[\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k+2}x^k\Big] \end{aligned}$$

et le coefficient de x^n est donc donné par

$$\mathbb{E}(I_{n+2}) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+1}{k+2}$$

qui s'écrit encore

$$\mathbb{E}(I_n) = 2(n+1)H_n - 4n = 2(n+1)(H_{n+1}-1) - 2n$$

où H_n désigne la somme des inverses des n premiers entiers.

Remarque

On peut trouver directement le coût de construction moyen d'un abr de taille n, c'est-à-dire la longueur de cheminement interne moyenne $\mathbb{E}(I_n)$, en voyant que celle-ci vérifie l'équation de récurrence déduite de l'équation (2)

$$\mathbb{E}(I_n) = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(I_{k-1}) + \mathbb{E}(I_{n-k})$$

que l'on reconnaît, c'est l'équation de récurrence de l'algorithme de tri rapide. Elle se résout en

$$\mathbb{E}(I_n) = 2(n+1)(H_{n+1}-1) - 2n$$

où H_n désigne la somme des inverses des n premiers entiers. Cela montre que le coût moyen de construction d'un abr est d'ordre de grandeur $n \log n$ (comme dans le cas le meilleur !).

4.2 Coût de recherche dans un abr ; longueur de cheminement externe

Si E_n est la longueur de cheminement externe, c'est-à-dire la somme des longueurs de u pour tous les u noeuds externes de l'arbre T_n et si I_n est la longueur de cheminement interne, alors ces deux variables sont reliées par

Lemme 3

$$E_n = I_n + 2n$$

Démonstration : par récurrence sur n, en détaillant le mécanisme de passage de T_n à T_{n+1}. On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= E_n - D_{n+1} + 2(1 + D_{n+1}) = E_n + D_{n+1} + 2 \\ I_{n+1} &= I_n + D_{n+1} \end{aligned}$$

$\square$

On dit qu'une recherche est réussie quand la clé objet de la recherche est trouvée. On dit que la recherche est vaine si elle se termine sur un noeud externe. On appelle D_n la profondeur (le niveau) d'insertion de la n-ième donnée, c'est aussi le coût d'une recherche vaine. Il peut arriver selon les configurations d'ordinateurs que ce coût de recherche soit considérable et non négligeable par rapport au coût de construction de l'abr.

4.2.1 Résultats en moyenne sur la profondeur d'insertion

Le coût moyen d'une recherche vaine est ainsi égal à la profondeur moyenne d'insertion

$$\mathbb{E}(D_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\mathbb{E}(E_n)$$

et d'après le lemme 3

$$\mathbb{E}(D_{n+1}) = \frac{1}{n+1}(\mathbb{E}(I_n) + 2n)$$

soit encore, par les évaluations ci-dessus,

$$\mathbb{E}(D_{n+1}) = 2(H_{n+1} - 1)$$

ce qui montre que le coût moyen de recherche est d'ordre de grandeur $2\log n$. On retrouve bien entendu le résultat obtenu par la méthode de séries génératrices de la section 3.4.

4.2.2 Résultats p.s. sur la longueur de cheminement externe

Rappelons que

$$E_n \;=\; \sum_{u \text{ nœud ext. de } T_n} \mid u \mid$$

soit encore

$$E_n = \sum_{k \geq 0} k \; U_k(n)$$

de sorte que

$$E_n = W_n'(1)$$

où W_n est le polynôme de niveau.

Comme la dérivée d'une martingale est encore une martingale, il suffit de calculer $M'_n(z)$ pour $z \in \mathbb{R}$, pour obtenir que

$$M'_n(1) = \frac{W'_n(1)}{n+1} - \frac{\mathbb{E}W'_n(1)}{n+1} = \frac{W'_n(1)}{n+1} - 2(H_{n+1} - 1)$$

est une martingale, soit le

Théorème 6 *(Regnier, 1989)*
$\frac{1}{n+1}(E_n - \mathbb{E}(E_n))$ *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale.*

On a, bien entendu, des résultats analogues pour la longueur de cheminement interne I_n.

4.2.3 Loi limite du coût de Quicksort, méthode de contraction

On appelle "coût de Quicksort" le coût de recherche dans un abr ou bien la longueur de cheminement externe, c'est-à-dire la variable E_n que nous avons déjà regardée. Outre les résultats en moyenne et de type martingale vus dans les paragraphes précédents, la question se pose de la **loi limite** de ce coût renormalisé :

$$Y_n := \frac{1}{n}(E_n - \mathbb{E}(E_n)) \tag{5}$$

Dans ce paragraphe, par abus de notaion, on écrira parfois Y_n au lieu de $\mathcal{L}(Y_n)$.

Le résultat du théorème suivant repose sur la **méthode**, dite **de contraction** :

Etape 1 - On montre que Y_n vérifie une certaine équation en loi et lorsque $n \to +\infty$, la loi limite vérifie une equation du type (7), c'est-à-dire une equation de point fixe sur les lois de probabilités F : $S(F) = F$ où S est une transformation qui dépend du modèle.

Etape 2 - On munit l'espace M des mesures de probabilités d'une distance qui rende cet espace métrique et complet, c'est-à-dire de Banach. Par exemple, ce pourra être la distance de Wasserstein d_2 (qui est la distance de Mallow d_p pour $p = 2$).

Etape 3 - On étudie la transformation

$$S : F \longmapsto S(F) \tag{6}$$

comme un opérateur de (M, d_2) dans (M, d_2), avec pour objectif de démontrer que S est une **contraction**.

Etape 4 - Grâce aux étapes 2 et 3, on peut appliquer le théorème du point fixe (ou théorème de Banach) à la transformation S de (M, d_2) dans (M, d_2). On en déduit que la transformation S a un unique point fixe, solution de l'équation (7), et que la suite $(S^n(F))$ converge vers ce point fixe (toujours pour la distance d_2), à une vitesse exponentielle.

Remarquons bien qu'à ce stade, on aura obtenu la loi limite comme unique solution d'une équation de point fixe, mais que rien ne dit que la loi de Y_n ressemble à $(S^n(F))$.

Voyons ce que cette méthode permet d'obtenir pour Quicksort (cf. [9], [10]).

Théorème 7 *(Roesler, 1992) La loi du coût renormalisé de Quicksort Y_n, converge vers la loi d'une variable aléatoire Y, unique solution de l'équation (en loi)*

$$Y = \tau Y + (1-\tau)\bar{Y} + C(\tau) \tag{7}$$

où

Y et $\bar{Y}$ sont indépendantes et de même loi
τ suit une loi uniforme sur $[0,1]$
(C, τ) et les Y sont indépendantes
$C(x) = 1 + 2(x \log x + (1-x)\log(1-x))$

Démonstration

Etape 1 : Cherchons d'abord l'équation vérifiée par $\mathcal{L}(Y_n)$: rappelons que le coût de recherche E_n vérifie la relation de récurrence (équation en loi)

$$E_n = E_{Z_n - 1} + \bar{E}_{n - Z_n} + n - 1$$

où Z_n suit une loi uniforme sur les entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$. Il est alors facile d'en déduire l'équation en loi vérifiée par la variable renormalisée Y_n. Posons pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$$C_n(i) = \frac{1}{n}\left[n - 1 + \mathbb{E}(E_{i-1}) + \mathbb{E}(E_{n-i}) - \mathbb{E}(E_n)\right]$$

de sorte que

$$C_n(Z_n) = \frac{1}{n}\left[n - 1 + \mathbb{E}(E_{Z_n - 1}) + \mathbb{E}(E_{n - Z_n}) - \mathbb{E}(E_n)\right]$$

Alors

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{E_n - \mathbb{E}(E_n)}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left[E_{Z_n-1} + \bar{E}_{n-Z_n} + n - 1 - \mathbb{E}(E_n)\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[(Z_n-1)Y_{Z_n-1} + \mathbb{E}(E_{Z_n-1}) + (n-Z_n)\bar{Y}_{n-Z_n} + \mathbb{E}(E_{n-Z_n}) + n - 1 - \mathbb{E}(E_n)\right] \\ &= \frac{Z_n-1}{n}Y_{Z_n-1} + \frac{n-Z_n}{n}\bar{Y}_{n-Z_n} + C_n(Z_n) \end{aligned}$$

qui est l'équation cherchée.Voyons ensuite que

Lemme 4

$$\frac{Z_n}{n} \longrightarrow \textit{Unif}\,[0,1] \qquad \textit{en loi}$$

et

Lemme 5

$$\forall x \in]0,1[,\ C_n(nx) \longrightarrow C(x)\ , n \to +\infty$$

où

$$C(x) := 1 + 2(x\log x + (1-x)\log(1-x))$$

Le Lemme 4 est facile à démontrer, le lemme 5 revient à un calcul explicite puisque les $C_n(i)$ font intervenir les moyennes connues

$$\mathbb{E}(E_i) = 2(H_{i+1}-1)(i+1).$$

Ces deux lemmes permettent de passer à la limite dans l'équation sur Y_n (remarquons que les propriétés de martingale notamment de Y_n nous assuraient déjà cette convergence en loi) et on obtient ainsi que Y_n converge en loi vers Y solution de

$$Y = \tau Y + (1-\tau)\bar{Y} + C(\tau)$$

qui peut s'écrire $F = S(F)$ avec S qui est la transformation

$$F \longmapsto S(F) = \mathcal{L}(\tau X + (1-\tau)\bar{X} + C(\tau))$$

<u>Etape 2 :</u> On définit sur l'espace M des mesures de probabilités, pour toute $F, G \in M$,

$$d_2(F,G) = \inf\{\|X-Y\|_2, X \text{ de loi } F, Y \text{ de loi } G\}$$

où
$$\|X-Y\|_2=\mathbb{E}(\mid X-Y\mid^2)^{1/2}$$
est la norme L^2. On peut voir que d_2 est une distance (distance de Wasserstein) qui rend (M,d_2) métrique et **complet**. On peut exprimer aussi cette distance sous forme intégrale, en montrant (cf. [8], th. 8.1) que l'inf ci-dessus est atteint pour une variable aléatoire $X=F^{-1}(U)$ et pour une variable aléatoire $Y=G^{-1}(U)$ où U est **la même** variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, de sorte que
$$\begin{aligned} d_2(F,G) &= \|F^{-1}(U)-G^{-1}(U)\|_2 \\ &= \Big(\int_0^1 \mid F^{-1}(u)-G^{-1}(u)\mid^2 \ du\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$
La convergence pour la distance d_2 revient à la convergence faible **et** la convergence des moments d'ordre 2.

Etape 3 :

Lemme 6 *Lemme de contraction*

La transformation
$$F\longmapsto S(F)=\mathcal{L}(\tau X+(1-\tau)\bar{X}+C(\tau))$$
est contractante de (M,d_2) *dans* (M,d_2) *car*
$$d_2^2(S(F^0),S(G^0))\leq \mathbb{E}[\tau^2+(1-\tau)^2]\ d_2^2(F^0,G^0)$$
où F^0 *est la loi* F *translatée de telle sorte que* $\mathbb{E}(F^0)=0$.

Remarque : si τ est de loi uniforme sur $[0,1]$,
$$\mathbb{E}[\tau^2+(1-\tau)^2]=\int_0^1 x^2\ dx=\frac{2}{3}<1$$
Démonstration du lemme de contraction : Rappelons que
$$d_2^2(S(F),S(G))=\inf\{\|X-Y\|_2, X \text{ de loi } S(F), Y \text{ de loi } S(G)\}.$$
Soient X_1 et X_2 indépendantes de loi F et soient Y_1 et Y_2 indépendantes de loi G. Alors, puisque d_2 est un inf,
$$\begin{aligned} d_2^2(S(F),S(G)) &\leq \|\tau X_1+(1-\tau)X_2+C(\tau)-\tau Y_1-(1-\tau)Y_2-C(\tau)\|_2 \\ &= \mathbb{E}\big[\tau(X_1-Y_1)+(1-\tau)(X_2-Y_2)\big]^2 \\ &= \mathbb{E}\big(\tau\big[X_1-\mathbb{E}X_1-(Y_1-\mathbb{E}Y_1)\big]+\tau[\mathbb{E}X_1-\mathbb{E}Y_1]+(1-\tau)\big[X_2-\mathbb{E}X_2-(Y_2-\mathbb{E}Y_2)\big]+(1-\tau)[\mathbb{E}X_2-\mathbb{E}Y_2]\big)^2 \end{aligned}$$

et en développant le carré, grâce à l'indépendance et aux espérances nulles des variables recentrées, on obtient :

$$d_2^2(S(F), S(G)) \leq \mathbb{E}[\tau^2 + (1-\tau)^2]\ \mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}X_1 - (Y_1 - \mathbb{E}Y_1))^2 + (\mathbb{E}X - \mathbb{E}Y)^2$$

ce qui permet de se ramener à F^0 et G^0 et donc

$$d_2^2(S(F^0), S(G^0)) \leq \mathbb{E}[\tau^2 + (1-\tau)^2]\ d_2^2(F^0, G^0)$$

$\square$

Etape 4 : Le théorème du point fixe (théorème de Banach) pour une contraction S de (M, d_2) dans (M, d_2) , de taux de contraction $K < 1$, dit que la suite $S^n(F), n \in \mathbb{N}$, est une suite de Cauchy qui converge (car (M, d_2) est complet) à la vitesse K^n vers une limite qui est l'unique solution de l'équation de point fixe $S(F) = F$.

Ce qui termine la démonstration du théorème de Roesler. $\square$

Représentation du point fixe :

Nous avons déjà dit que le théorème et plus généralement la méthode de contraction, n'implique pas de relation entre $\mathcal{L}(Y_n)$ et $S^n(F)$. Dans le cas de Quicksort, tout ce que l'on peut faire est d'avoir une représentation de $S^n(F)$ comme loi d'une variable aléatoire, disons, F_n, qui est une somme de variables aléatoires. Le lemme suivant s'obtient sans difficulté, par récurrence.

Lemme 7

$$S^n(F) = \mathcal{L}(F_n)$$

où

$$F_n = C_\emptyset + \sum_{k<n} \sum_{|u|=k} C_u A_u + \sum_{|u|=n} A_u X_u$$

où les $(X_u, u \in U)$ sont i.i.d. de loi F, les (C_u, U_u) sont i.i.d. avec U_u de loi uniforme sur $[0,1]$ et $C_u = C(U_u)$, indépendants des X_u, et où

$$A_u = \prod_{v \leq u} \tilde{U}_v$$

avec la notation habituelle des $\tilde{U}$, déjà utilisée au paragraphe 2.

References

[1] J. D. Biggins. (1997). How fast does a general branching random walk spread?. Classical and modern branching processes. IMA Vol. Math. Appl. **84** 19–39.

[2] B. Chauvin, M. Drmota and J. Jabbour-Hattab. (2001) The profile of binary search trees. to appear in Annals of Applied Probability

[3] L. Devroye. (1987). Branching processes in the analysis of the height of trees. Acta Inf. **24** 277–298.

[4] L. Devroye and B. Reed. (1995) On the variance of the height of random binary search trees, SIAM J. Comput. **24**, 1157-1162.

[5] M. Drmota. (2000) The Variance of the Height of Digital Search Trees, Acta Inf., submitted.

[6] J. Jabbour-Hattab. (2001). Martingales and large deviations for the binary search trees. Random Structures and Algorithms. **19**, 2, 112-127.

[7] H. M. Mahmoud. (1992) Evolution of Random Search Trees. Wiley.

[8] P. Major. (1978) On the Invariance Principle for Sums of Independent Identically Distributed Random Variables. J. Multivariate Analysis. **8**, 487-517.

[9] U. Roesler. (1991) A limit theorem for Quicksort. Theoritical Informatics and Applications. Vol 25, n 1, 85-100

[10] U. Roesler. (1992) A fixed point theorem for distributions. Stochastic Processes and their Applications. 42, 195-214